代数幾何学シンポジウム記録
1979年度　pp.1-8

標数 p の単有理楕円曲面について

東北大理　　桂　利行

§0. Introduction.

X を 標数 p の代数的閉体 k 上定義された非特異射影曲面とする。X は，函数体 $k(X)$ が k 上超越次数 2 の純超越拡大体に含まれるとき，単有理的といわれる。標数 $p=0$ のときには，単有理曲面と有理曲面の概念が一致することは周知の事実である。標数 p が正の場合には，1958年に Zariski が有理的でない単有理曲面の例を見出して以来，T. Shioda，M. Artin，M. Miyanishi，A. N. Rudakov 及び I. R. Šafarevič 等によって，同様な例が数多く見出され研究されてきた。本稿では，楕円曲面のある類に対し，同様の例を見出し分類しうることを示す。標数 p が小さい程興味深いのであるが，ここでは $p \geqq 5$ の場合について証明の大要をのべ，$p=3$ の場合には結果だけ

を記す。

§1. 結果

$\pi : S \longrightarrow C$ を、非特異完備な曲線 C 上の relatively minimal な楕円曲面とする。

定義 1. 楕円曲面 $\pi : S \longrightarrow C$ に対し、非特異完備な曲線 C' と正則写像 $f : C' \longrightarrow C$ があって fiber product $S \times_C C'$ が有理曲面 $\mathbb{P}^2(k)$ に双有理同型になるとき、S は base change タイプの単有理曲面であるという。

定義 2. X を単有理曲面とする。k 上の 2 変数純超越拡大体 K で、$K \supset k(X)$ かつ拡大 $K/k(X)$ が純非分離的拡大になるようなものが存在するとき、X を純非分離的単有理曲面という。とくに $K/k(X)$ の拡大次数が p になるようにとれるとき、X を Zariski 曲面という。

楕円曲面 $\pi : S \longrightarrow C$ が単有理的なら C は有理曲線 $\mathbb{P}^1(k)$ に同型である。$\mathbb{P}^1(k)$ の無限遠点 ∞ をのぞいた部分の座標を t とかく。

次の2つのクラスの楕円曲面を考える。

class (I) i) $y^2 = 4x^3 - t^3(t-1)^3 x$,

ii) $y^2 = 4x^3 - t^3(t-1)^3(t-\alpha)x$,

class (II) i) $y^2 = 4x^3 - t^4(t-1)^4$,

ii) $y^2 = 4x^3 - t^4(t-1)^5$,

iii) $y^2 = 4x^3 - t^5(t-1)^5$,

iv) $y^2 = 4x^3 - t^4(t-1)^4(t-\alpha)^5$,

v) $y^2 = 4x^3 - t^5(t-1)^5(t-\alpha)^5$,

vi) $y^2 = 4x^3 - t^4(t-1)^5(t-\alpha)^5(t-\beta)^5$,

vii) $y^2 = 4x^3 - t^5(t-1)^5(t-\alpha)^5(t-\beta)^5(t-\gamma)^5$,

ただし，α，β，γ は 0，1 ではなく，かつおたがいに等しくない。

本稿の主定理は次のとおりである。

定理1．k の標数 $p \geqq 5$ とする。base change タイプの非有理単有理楕円曲面でセクションを持つものは次のように分類される。

1) $p \equiv 1 \pmod{12}$ のとき

このような曲面は存在しない。

2) $p \equiv 5 \pmod{12}$ のとき

このような曲面は class (II) で尽くされる。

3) $p \equiv 7 \pmod{12}$ のとき

このような曲面は class (I) で尽くされる。

4) $p \equiv 11 \pmod{12}$ のとき

このような曲面は class (I)(II) で尽くされる。

定理 2. k の標数 $p = 3$ とする。

base change タイプの非有理準有理楕円曲面でセクションを持つものは次のように分類される。

1) $$y^2 = 4x^3 - t^5(t-1)^3 x + t^4(t-1)^4(a + bt + \varphi(t)t^2),$$

ただし, $a \neq 0$, $b \neq 0$,

$\varphi(t)$ は任意の 2 次以下の多項式.

2) $$y^2 = 4x^3 - t^3(t-1)^3(t+1)^2 x + a(t-1)^6 + bt^3(t-1)^4 + (t-1)^4 t^4 \varphi(t),$$

ただし, a, b は k の任意の元,

$\varphi(t)$ は任意の 4 次以下の多項式.

3) $$y^2 = 4x^3 - t^3(t-1)^3(t+1)^3(t-\alpha)^3 x + (t-1)^6\{a + bt^3 + ct^3(t+1)^3\} + t^3(t+1)^3(t-\alpha)^3(t-1)^4\varphi(t)$$

ただし, $\alpha \neq -1, 0, 1$, a, b, c は k の任意の元

$\varphi(t)$ は任意の 5 次以下の多項式.

Remark. 定理1に於けるclass (I) i) 及び class (II) i) ii) iii), 及び定理2に於ける1)は, K3曲面である。

系1. kの標数$p \geqq 3$とする。base changeタイプの非有理単有理楕円曲面でセクションを持つものはZariski曲面である。さらに,構造層のオイラー数$\chi(\mathcal{O}_S)$は, 5以下である。

§2. 定理1の証明の大要.

補題1. $\pi : S \longrightarrow C$がbase changeタイプの単有理楕円曲面であるならば, Sは純非分離的楕円曲面である。

証明. 定義から, 曲線C'と正則写像$f : C' \longrightarrow C$でfiber product $S \times_C C'$が有理曲面に双有理同型になるものが存在する。函数体$k(C)$の$k(C')$の中での分離閉包をKとし, Kを函数体とする曲線をC''とする。容易にわかるように, C, C', C''は有理曲線であるからそれぞれの局所座標t, u, vを適当にとれ

り，その座標に関する C'' から C への正則写像を g とかけば

(1) $$t = f(u) = g(u^{p^n})$$

となる。g の係数を p^n 乗根におきかえたものを $g^{(1/p^n)}$ とかけば (1) は

(2) $$t = [\,g^{(1/p^n)}(u)\,]^{p^n}$$

とかける。すなわち，次の図式をうる。

(3)
$$\begin{tikzcd}
C'' \arrow[d, "g"'] & C' \arrow[l, "v = u^{p^n}"'] \arrow[d, "g^{(1/p^n)}"] \\
C & \mathbb{P}^1 \arrow[l, "v = s^{p^n}"]
\end{tikzcd}$$

ここで，s は $\mathbb{P}^1$ の座標である。これから

(4)
$$\begin{tikzcd}
S \arrow[d] & S \times_C \mathbb{P}^1 \arrow[l, "h"'] \arrow[d] & S \times_C C' \arrow[l, "\widetilde{g^{(1/p^n)}}"'] \arrow[d] \\
C & \mathbb{P}^1 \arrow[l, "v = s^{p^n}"] & C' \arrow[l, "g^{(1/p^n)}"]
\end{tikzcd}$$

なる図式をうるが，$S \times_C C'$ は有理的で $\widetilde{g^{(1/p^n)}}$ は分離的である。従って Enriques-Castelnuovo の criterion から $S \times_C \mathbb{P}^1$ は有理的になり，h が純非分離的故求める結果をうる。(証明終り)

補題2. $\pi : S \longrightarrow C$ をセクションをもつ relatively minimal な楕円曲面とする。
そのとき，$c_2(S) = 12 \Leftrightarrow S$ が有理的。
とくに S が singular fiber をもち，かつ有理的でないための必要充分条件は $c_2(S) \geqq 24$ である。

以下，標数 $p \geqq 5$ とする。

補題3. 次数 p の純非分離的な base change によって singular fiber のタイプは次のように変化する。

もとのタイプ	変換後のタイプ
b_m	b_{pm}
$C5_m$	$C5_{pm}$

Char. k / もとのタイプ	$p \equiv 1 \bmod 12$ タイプ	$p \equiv 5 \bmod 12$ タイプ	$p \equiv 7 \bmod 12$ タイプ	$p \equiv 11 \bmod 12$ タイプ
c1	c1	c8	c1	c8
c2	c2	c2	c7	c7
c3	c3	c6	c3	c6
c4	c4	c4	c4	c4
c6	c6	c3	c6	c3
c7	c7	c7	c2	c2
c8	c8	c1	c8	c1

ここで，記号はOgg [1] に従う。

補題4．base changeタイプの非有理単有理楕円曲面でセクションを持つものはsingular fiberとしてタイプb_mのものも，$C5_m$のものも含まない。

証明は，上記3つの補題を組みあわせればできる。

補題5．補題4の仮定の下に，楕円曲面Sは，Zariski曲面である。

証明は，補題1，補題3及び補題4の組み合せで得られる。

以上から，次数pの純非分離的なbase changeによって有理的になるような楕円曲面を分類すれば，定理1を示しうることがわかる。これは，singular fiberの計算から得られる。標数pが2又は3のときには，wild ramificationの問題があって複雑になるが，基本方針は上記と同様である。詳細はどこかに発表する予定である。

参考文献

[1] A.P. Ogg; Elliptic curves and wild ramification, Amer. J. Math. 89 (1967).